

Esercizi sulle equazioni di secondo grado

Premesse

- 1) Ricordiamo che per il trinomio di secondo grado $ax^2 + bx + c$ sussiste la seguente scomposizione in fattori

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \quad (1)$$

dove x_1, x_2 sono le radici dell'equazione di secondo grado associata

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- 2) Nell'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ sussistono le seguenti relazioni tra i coefficienti a, b, c e la somma ed il prodotto delle radici

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad (2)$$

*** **

1) Semplificare le seguenti frazioni algebriche

$$\text{a) } \frac{x^2 + 5x - 6}{2x^2 - x - 1} \quad \text{b) } \frac{2x^2 + x - 6}{2x^2 - x - 3} \quad \text{c) } \frac{x^2 - 4}{5x^2 - 7x - 6}$$

Soluzioni

- a) Scomponiamo in fattori i trinomi che compaiono al numeratore e al denominatore applicando la (1).

$$x^2 + 5x - 6 = 0, \text{ da cui } x_2^1 = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot (-6)}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2}; \text{ le due radici sono } x_1 = -6; x_2 = 1.$$

$$\text{Sussiste la scomposizione in fattori: } x^2 + 5x - 6 = (x + 6)(x - 1).$$

$$2x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow x_2^1 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}; \text{ le due radici sono } x_1 = -\frac{1}{2}; x_2 = 1.$$

Il trinomio al denominatore si scompone come segue:

$$2x^2 - x - 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 1) = (2x + 1)(x - 1)$$

Semplificazione della frazione

$$\frac{x^2 + 5x - 6}{2x^2 - x - 1} = \frac{(x + 6)\cancel{(x - 1)}}{(2x + 1)\cancel{(x - 1)}} = \frac{x + 6}{2x + 1}, \text{ con la condizione di equivalenza (C.d.Eq.) } x \neq 1.$$

b) Procediamo come nel precedente esercizio scomponendo in fattori numeratore e denominatore.

$$2x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow x_2^1 = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4}; \text{ le due radici sono } x_1 = -2; x_2 = \frac{3}{2}. \text{ Si ha}$$

$$2x^2 + x - 6 = 2(x+2)\left(x - \frac{3}{2}\right) = (x+2)(2x-3).$$

$$2x^2 - x - 3 = 0 \rightarrow x_2^1 = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4}; \text{ le due radici sono } x_1 = -1; x_2 = \frac{3}{2}.$$

Scomposizione del trinomio:

$$2x^2 - x - 3 = 2(x+1)\left(x - \frac{3}{2}\right) = (x+1)(2x-3)$$

La frazione si può scrivere nella forma seguente

$$\frac{2x^2 + x - 6}{2x^2 - x - 3} = \frac{(x+2)(\cancel{2x-3})}{(x+1)(\cancel{2x-3})} = \frac{x+2}{x+1}, \text{ con la condizione di equivalenza (C.d.Eq.) } x \neq \frac{3}{2}.$$

c) Scomponiamo in fattori numeratore e denominatore della frazione.

$$x^2 - 4 = (x+2)(x-2).$$

$$5x^2 - 7x - 6 = 0 \rightarrow x_2^1 = \frac{7 \pm \sqrt{169}}{10} = \frac{7 \pm 13}{10}; \text{ le due radici sono } x_1 = -\frac{3}{5}; x_2 = 2. \text{ Si ha:}$$

$$5x^2 - 7x - 6 = 5\left(x + \frac{3}{5}\right)(x-2) = (5x+3)(x-2)$$

La frazione si può scrivere nella forma seguente

$$\frac{x^2 - 4}{5x^2 - 7x - 6} = \frac{(x+2)(\cancel{x-2})}{(5x+3)(\cancel{x-2})} = \frac{x+2}{5x+3}, \text{ con la condizione di equivalenza (C.d.Eq.) } x \neq 2.$$

Esercizi proposti

Verificare che sussistono le seguenti semplificazioni

$$\text{a) } \frac{x^2 - 6x - 7}{6x^2 - x - 7} = \frac{x-7}{6x-7}, \quad \text{C.d.Eq.: } x \neq -1$$

$$\text{b) } \frac{9 - x^2}{5x^2 + 7x - 24} = \frac{3-x}{5x-8}, \quad \text{C.d.Eq.: } x \neq -3$$

$$\text{c) } \frac{6x^2 - 5x - 14}{3x^2 6x} = \frac{6x+7}{3x}, \quad \text{C.d.Eq.: } x \neq 2$$

2) Equazioni razionali fratte

Risolvere le seguenti equazioni

$$\text{a) } \frac{x}{2x^2-1} - \frac{1}{x} = 0 \quad \text{b) } \frac{x-3}{2x^2+x-15} - \frac{x+1}{x+3} = 0$$

Soluzioni

$$\text{a) } \frac{x}{2x^2-1} - \frac{1}{x} = 0 \rightarrow \frac{x^2 - (2x^2 - 1)}{x(2x^2 - 1)} = 0 \rightarrow -x^2 + 1 = 0, \text{ con le C.d.E.: } (x \neq 0) \wedge (2x^2 - 1 \neq 0).$$

L'equazione semplificata ammette come radici i valori $x_1 = -1, x_2 = 1$, che verificano le C.d.E., quindi sono accettabili come soluzioni dell'equazione in esame. Concludiamo che l'insieme delle soluzioni dell'equazione è $S = \{-1; 1\}$.

$$\text{b) } \frac{x-3}{2x^2+x-15} - \frac{x+1}{x+3} = 0 \quad \text{Il denominatore della prima frazione si scompone come segue}$$

$$2x^2 + x - 15 = (x+3)(2x-5), \text{ quindi si ha:}$$

$$\frac{-2x^2 + 4x + 2}{(x+3)(2x-5)} = 0, \text{ da cui } -2x^2 + 4x + 2 = 0, \text{ con le C.d.E. } (x \neq -3) \wedge \left(x \neq \frac{5}{2}\right).$$

L'equazione si semplifica nella seguente

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \text{ le cui radici sono } x_{1,2}^1 = 1 \pm \sqrt{2}; \text{ i due valori verificano le C.d.E., quindi sono accettabili come soluzioni dell'equazione. L'insieme delle soluzioni è: } S = \{1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\}.$$

Esercizi proposti

Risolvere le equazioni che seguono

$$1) \frac{2+x}{x^2-4x+3} + \frac{4-x}{(x-1)(x+3)} = \frac{14}{x+3} \quad \left[x_1 = 4; x_2 = \frac{6}{7} \right]$$

$$2) \frac{3}{2x-1} - \frac{x+2x^2}{2(1-4x^2)} = 0 \quad [x_1 = -6]$$

$$3) \frac{4+3x}{x^2-3x} + \frac{x+1}{x^2-9} = 0 \quad \left[x_1 = -2; x_2 = -\frac{3}{2} \right]$$

$$4) \frac{1}{2x^2+x-1} + \frac{2x}{3(x^2-1)} = 0 \quad \left[x_1 = \frac{3}{4} \right]$$

$$5) \frac{x}{2x^2 - x - 15} + \frac{1}{2} = \frac{2x+6}{x-3} = 0$$

$$\left[x_1 = -\frac{25}{3}; x_2 = -3 \right]$$

$$6) \frac{1}{1-x} - \frac{2}{2-x} = \frac{3}{2}$$

$$\left[x_1 = \frac{2}{3}; x_2 = 3 \right]$$

*** **

Equazioni parametriche

1) Nell'equazione parametrica $\frac{x}{3x+5} - \frac{x+k}{3+x} = 0$ risolvere i quesiti che seguono.

- a. Trovare il valore di k tale che $x=-1$ sia radice dell'equazione. Per il valore di k determinato trovare l'eventuale seconda radice dell'equazione corrispondente.

Risposte: $k = 0$; $x_2 = 0$.

- b. Determinare per quale valore del parametro k l'equazione ammette come radice

$x_1 = \frac{1}{2}$. Per il corrispondente valore di k determinare la seconda radice.

Risposte: $k = -\frac{3}{13}$; $x_2 = -\frac{15}{13}$

- c. Trovare il valore di k tale che una radice sia $x=4$

Soluzione

- a. Imponendo che $x=-1$ sia soluzione si perviene all'uguaglianza

$$\frac{-1}{-3+5} - \frac{-1+k}{3-1} = 0, \text{ da cui si deduce } k = 0. \text{ L'equazione parametrica diventa}$$

$$\frac{x}{3x+5} - \frac{x}{3+x} = 0 \rightarrow x \left(\frac{1}{3x+5} - \frac{1}{3+x} \right) = 0 \rightarrow -2x \left(\frac{x+1}{3x+5} \right) = 0, \text{ le cui radici sono}$$

$$x_1 = -1, x_2 = 0.$$

- b. Il valore $x_1 = \frac{1}{2}$ per definizione di radice deve soddisfare l'equazione, dunque deve risultare

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}+5} - \frac{\frac{1}{2}+k}{3+\frac{1}{2}} = 0, \text{ da cui } k = -\frac{3}{13}.$$

L'equazione assegnata diventa $\frac{x}{3x+5} - \frac{x-\frac{3}{13}}{3+x} = 0$, che si riduce alla seguente

$26x^2 + 17x - 15 = 0$, le cui radici sono

$$x_2^1 = \frac{-17 \pm \sqrt{1849}}{2 \cdot 26} = \frac{-17 \pm 43}{2 \cdot 26}, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_1 = -\frac{15}{13}.$$

- c. Imponendo la condizione che $x=4$ sia radice dell'equazione si ricava per il parametro il valore $k = -\frac{40}{17}$. Sostituendo a k detto valore nell'equazione parametrica, dopo le necessarie elaborazioni algebriche, si ottiene l'equazione

$$17x^2 - 43x - 100 = 0, \text{ che ammette come radici } x_1 = -\frac{25}{17}; x_2 = 4.$$

- 2) Nell'equazione parametrica $(2k-3)x^2 - x - 4k = 0$ determinare i valori del parametro k per i quali sono rispettivamente soddisfatte le seguenti richieste:
- a) Una radice dell'equazione sia $x=-1$. Per il valore trovato determinare la seconda radice dell'equazione.
 - b) La somma delle radici dell'equazione sia $1/2$. Determinare le radici della corrispondente equazione.
 - c) Il prodotto delle radici dell'equazione sia $-11/5$. Determinare le radici della corrispondente equazione.

Soluzione

- a) Sostituendo nell'equazione $x=-1$ si ha l'uguaglianza

$$(2k-3) + 1 - 4k = 0 \rightarrow k = -1; \text{ l'equazione parametrica diventa}$$

$$-5x^2 - x + 4 = 0 \rightarrow 5x^2 + x - 4 = 0 \rightarrow x_2^1 = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{10} = \frac{-1 \pm 9}{10}, \text{ da cui}$$

$$x_1 = -1; x_2 = \frac{4}{5}.$$

- b) La somma delle radici dell'equazione di secondo grado in esame per la prima delle relazioni (2) vale

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{1}{2k-3}, \text{ quindi deve risultare}$$

$$\frac{1}{2k-3} = \frac{1}{2} \rightarrow k = \frac{5}{2}.$$

La corrispondente equazione è

$$\left(2 \cdot \frac{5}{2} - 3\right)x^2 - x - 4 \cdot \frac{5}{2} = 0 \rightarrow 2x^2 - x - 10 = 0, \text{ le cui radici sono } x_1 = -2; x_2 = \frac{5}{2}.$$

c) Il prodotto delle radici è $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, quindi deve risultare

$$\frac{-4k}{2k-3} = -\frac{11}{5} \rightarrow k = \frac{33}{2}$$

Con il valore trovato per il parametro l'equazione parametrica diventa

$$30x^2 - x - 66 = 0, \text{ le cui radici sono } x_1 = -\frac{22}{15}, x_2 = \frac{3}{2}.$$